

XIX.

GISopen

KONFERENCIA



SZÉKESFEHÉRVÁR
2015. március 25-27.

GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ ITERÁCIÓS MEGOLDÁSA KVATERNIÓVAL

PAPP ERIK

**SZENT ISTVÁN EGYETEM
YBL MIKLÓS ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI KAR
BUDAPEST**

TÉMAKÖRÖK

1. *Bevezetés*
2. *A kvaternió és a 3D forgatási mátrix*
3. *Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval*
4. *THI program*
5. *Összefoglalás*

Bevezetés

- **A dátumtranszformáció** az egyik leggyakrabban alkalmazott számítási módszer a geodéziában, fotogrammetriában, térinformatikában az animációban, a robottechnikában és más kutatási területeken.
- Ez magában foglalja **a térbeli adatok** (koordináták, képek, térképek, modellek, pontfelhők stb.) **transzformálását a forrás koordináta rendszerből a cél koordináta rendszerbe.**
- Jelenleg a legtöbbször alkalmazott modell a **hétparaméteres hasonlósági transzformációs modell.**
- Dátumtranszformáció esetén **hét transzformációs paramétert** kell kiszámítanuk: **három eltolást, három elforgatást** és a **méretarány paramétert** a mindkét rendszerben adott közös pontok koordinátáinak felhasználásával.
- Az előadás **Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs** modellt ismerteti, amelyet **klasszikus modellnek, hétparaméteres modellnek, térbeli Helmert modellnek** vagy **konform csoportnak $C7(3)$** is neveznek.

Bevezetés

- A geodéziában, mivel a forgásszögek általában nagyon kicsinyek, vagyis a két koordináta rendszer tengelyei közel párhuzamosak, lineáris egyszerűsített modellt alkalmaznak amely paramétereit egyszerűen számíthatók.
- A transzformációs paraméterek számításához nemlineáris, túlhatározott egyenleteket használnak a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéssel. Ezen megoldások két csoportba sorolhatók: **iterációs** és **analitikus** algoritmusok.
- Az algoritmusok közötti fő különbség **a forgatási mátrix eltérő értelmezésének** köszönhető, amely különböző linearizációs modelleket eredményez.
- A forgatási mátrixban kilenc ismeretlen szerepel, amelyekre hat ortogonalitási és normalizálási feltétel teljesül. Az iterációs algoritmusok alkalmazásakor linearizálás és a paraméterek számításához jól közelítő értékek szükségesek.
- Jelenleg az **analitikus algoritmusok két fő típusa** használatos: a **procrustes** és a **kvaternió alapú** algoritmus.

Bevezetés

- Az előadásban megvizsgáljuk a dátumtranszformáció megoldását a **kvaternió algebra** jelölésével illetve alkalmazásával.
- **Egység kvaterniót** alkalmazunk a térbeli forgatási mátrix meghatározásához.
- Ismertetjük a **kvaternó alapú geodéziai dátumtranszformáció iterációs megoldását** linearizálással a **Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben**.
- Az iteráció eredményeként a **Q** kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeit és a λ méretarányt kapjuk.
- Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy **tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható** a transzformációs paraméterek számításához.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Sir William Rowan Hamilton 1843-ban fedezte fel a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására.

- *A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egységsugarú gömbön történő leírására.*
- *Ezért széleskörben alkalmazzák*
 - *mozgó objektum helyzetének leírására*
 - *mint például űrhajó, repülőgép vagy gépjármű*
 - *továbbá a robotok irányításában*
 - *az animációban*
 - *fizikában és mechanikában*
 - *az orvostudományban*
 - *és más kutatási területeken*
- *A továbbiakban megvizsgáljuk a dátumtranszformáció megoldását a kvaternió algebra jelölésével illetve alkalmazásával és bemutatjuk a kvaternió alapú dátum transzformáció iterációs megoldását.*

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

A Q kvaternió komplex számként a következőképpen definiálható

$$Q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q} \quad (1)$$

ahol

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

és a képzetes rész

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

egy 3D vektort jelöl.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

A megfelelő **konjugált kvaternió** az alábbiak szerint jelölhető

$$Q^* = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} = q_0 - \mathbf{q} \quad (2)$$

A \mathbf{Q} kvaternió **oszlopvektor formában** is kifejezhető az $(1 \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k})$ egységvektorok felhasználásával

$$\mathbf{Q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T = (q_0 \ \mathbf{q}^T)^T \quad (3)$$

ahol

$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$$

egy 3D vektort és T a transzponálást jelöli.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Egy 3D \mathbf{p} vektor mindig megadható kvaterniókal a következők szerint

$$\mathbf{p} = 0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = 0 + \mathbf{p} \quad (4)$$

A kvaternió hossza

$$\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (5)$$

Ha $\|\mathbf{Q}\| = 1$, akkor a \mathbf{Q} kvaterniót egység kvaterniónak nevezzük.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

A Q kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok

$$\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q \quad (6)$$

$$PQ = p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (7)$$

$$C(P + Q) = CP + CQ \quad (8)$$

$$CPQ = (CP)Q = C(PQ) \quad (9)$$

ahol λ egy valós szám, C , P és Q kvaterniók, a \cdot és \times a skaláris és a vektoriális szorzat jele.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

A Q kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok

$$(PQ)^* = Q^* P^* \quad (10)$$

$$QQ^* = \|Q\| \quad (11)$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|} \quad (12)$$

a Q^{-1} a Q kvaternió inverzét jelöli.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Vektorok **skaláris** és **vektoriális** szorzata a következőképpen definiálható

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{q} \quad (13)$$

A kvaternió szorzat $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ (7) egyenlet oszlopvektor és mátrix szorzataként kifejezhető

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ahol

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{I} egy 3×3 egységmátrix.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Bevezetve a következő mátrix jelöléseket

$$\mathbf{P}^+ = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^- = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ahol a + és – felsőindex a $\mathbf{C}(\cdot)$ mátrix előjelét jelöli

Behelyettesítve a (15) egyenletet a (14) egyenletbe, eredményül a **szorzat kvaternió** vektor és mátrix formáját kapjuk:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^+ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \mathbf{P} \quad (16)$$

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Egyszerűen bizonyítható, hogy a konjugált kvaternió a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\left(\mathbf{P}^*\right)^+ = \left(\mathbf{P}^+\right)^T, \quad \left(\mathbf{P}^*\right)^- = \left(\mathbf{P}^-\right)^T \quad (17)$$

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Jól ismert módszer egy 3D \mathbf{p} vektor \mathbf{s} vektorba történő forgatására kvaternióval a következő:

$$S = QPQ^* \quad (18)$$

ahol a \mathbf{p} és \mathbf{s} vektorokból képzett kvaterniók a P és S ,

Q pedig egység kvaternió, amely az alábbiak szerint definiálható

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_n \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

ahol $\mathbf{e}_n = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$ és $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$

amely egy 3D egység vektor, θ a forgásszög az \mathbf{e}_n egységvektor körül és az

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = -1$$

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Összehasonlítva a (19) egyenletet az (1) egyenlettel, nyilvánvaló, hogy

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad , \quad q_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad q_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad q_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2}$$

A (16) és (17) egyenletek alapján a (18) egyenlet kifejezhető vektor-mátrix formában

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{P}^+ \mathbf{Q}^* \quad (20)$$

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

A (20) egyenlet a következőképpen alakítható át

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{P}^+ \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^+ (\mathbf{Q}^*)^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{Q}^+ (\mathbf{Q}^-)^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (21)$$

Az \mathbf{R} 3×3 forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \quad (22)$$

ahol a \mathbf{q} egy 3D vektort jelöl, \mathbf{I} egy 3×3 egységmátrix ld. a (14) egyenletet.

A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Ezek után a forgásszögek, az \mathbf{R} forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \alpha_X = \arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \quad \beta_Y = \arcsin(-r_{13}), \quad \gamma_Z = \arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)$$

(23)

ahol α , β és γ az \mathbf{X} , \mathbf{Y} és \mathbf{Z} tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

A jól ismert **Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modell** a következők szerint írható fel:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R} \mathbf{b}_i \quad (24)$$

ahol $\mathbf{a}_i = [X_i Y_i Z_i]^T$ és $\mathbf{b}_i = [X_i Y_i Z_i]^T$ ($i=1, \dots, n$)

a két különböző rendszerben adott **közös pontok 3D koordinátái**,

$\mathbf{t} = (t_X t_Y t_Z)^T$ jelöli a három **eltolás** paramétert,

λ a **méretarány tényező**

és a 3×3 -as **\mathbf{R} forgatási mátrix** három forgatási paramétert tartalmaz.

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

Nyilvánvaló, hogy hét paraméter meghatározásához a közös pontok számának \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i ($i=1, \dots, n$) nagyobbnak vagy egyenlőnek kell lennie, mint három.

Határozzuk meg a **súlypontra vonatkozó** $\Delta \mathbf{a}_i$, $\Delta \mathbf{b}_i$ koordinátákat:

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0 \quad , \quad \Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0 \quad (25)$$

ahol

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \quad , \quad \mathbf{b}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i$$

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

Behelyettesítve a (25) egyenletet a (24) egyenletbe a következőt kapjuk

$$\Delta \mathbf{a}_i = \Delta \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R} \Delta \mathbf{b}_i \quad (26)$$

A (26) egyenlet linearizálása után a közvetítő egyenlet

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{x} - \mathbf{l}_i \quad (27)$$

ahol $\mathbf{V}_i = [V_{xi} \ V_{yi} \ V_{zi}]^T$ jelöli $\Delta \mathbf{a}_i$ a változásait,

$\delta \mathbf{x} = [dq_0 \ dq_1 \ dq_2 \ dq_3 \ d\lambda]^T$ az ismeretlen vektor javításai, a

\mathbf{B}_i egy 3×5 koefficiens mátrix, és az $\mathbf{l}_i = [l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi}]^T$ egy konstans vektor

A \mathbf{B}_i koefficiens mátrix elemei az alábbiak:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & K_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & K_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & K_3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = 2\lambda(-q_3\Delta x + q_2\Delta z), \quad B_{12} = 2\lambda(q_2\Delta y + q_3\Delta z)$$

$$B_{13} = 2\lambda(-2q_2\Delta x + q_1\Delta y + q_0\Delta z), \quad B_{14} = 2\lambda(-2q_3\Delta x - q_0\Delta y + q_1\Delta z)$$

$$B_{21} = 2\lambda(q_3\Delta x - q_1\Delta z), \quad B_{22} = 2\lambda(q_2\Delta x - 2q_1\Delta y - q_0\Delta z)$$

$$B_{23} = 2\lambda(q_1\Delta x + q_3\Delta z), \quad B_{24} = 2\lambda(q_0\Delta x - 2q_3\Delta y + q_2\Delta z)$$

$$B_{31} = 2\lambda(-q_2\Delta x + q_1\Delta y), \quad B_{32} = 2\lambda(q_3\Delta x + q_0\Delta y - 2q_1\Delta z)$$

$$B_{33} = 2\lambda(-q_0\Delta x + q_3\Delta y - 2q_2\Delta z), \quad B_{34} = 2\lambda(q_1\Delta x + q_2\Delta y)$$

$$K_1 = \left[1 - 2(q_2^2 + q_3^2)\right]\Delta x + 2\Delta y(q_1q_2 - q_0q_3) + 2\Delta z(q_0q_2 + q_1q_3)$$

$$K_2 = 2\Delta x(q_0q_3 + q_1q_2) + \left[1 - 2(q_1^2 + q_3^2)\right]\Delta y + 2\Delta z(q_2q_3 - q_0q_1)$$

$$K_3 = 2\Delta x(q_1q_3 - q_0q_2) + 2\Delta y(q_0q_1 + q_2q_3) + \left[1 - 2(q_1^2 + q_2^2)\right]\Delta z$$

Az \mathbf{l}_i tisztatag vektor elemei az alábbiak:

$$\mathbf{l}_i = \begin{bmatrix} l_{xi} & l_{yi} & l_{zi} \end{bmatrix}^T$$

$$l_{xi} = \Delta X_i - \lambda K_1$$

$$l_{yi} = \Delta Y_i - \lambda K_2$$

$$l_{zi} = \Delta Z_i - \lambda K_3$$

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

Mivel a Q egység kvaternió a következő kényszernek kell teljesülnie:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (29)$$

A (29) egyenlet linearizálása után a

$$\mathbf{C} \delta \mathbf{x} - \mathbf{W}_x = 0 \quad (30)$$

alakot kapjuk, ahol

$$\mathbf{C} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad 0] \quad \text{és} \quad \mathbf{W}_x = \left(1 - q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right) / 2 \quad (31)$$

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

Amikor a közös pontok száma $n \geq 3$, akkor $3n$ közvetítő egyenlet írható fel ld. a (27), az alábbiak szerint

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{B}_i \delta x - \mathbf{l} \quad (32)$$

ahol

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \downarrow \\ V_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \downarrow \\ B_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \downarrow \\ l_n \end{bmatrix}$$

A feladat kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel és kényszerfeltételekkel
(IV. kiegyenlítési csoport) Detrekői(1991).

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

A δx változások vektora a következő mátrix egyenlettel számítható

$$\delta x = \left(N_b^{-1} - N_b^{-1} C^T N_c^{-1} C N_b^{-1} \right) W + N_b^{-1} C^T N_c^{-1} W_x \quad (33)$$

ahol $N_b = B^T B$, $W = B^T l$, $N_c = C N_b^{-1} C^T$ (34)

Mivel a (33) mátrixegyenlet mindkét tagját balról szorozzuk az N_b^{-1} mátrixszal ezért az kiemelhető, végül a változások vektorát a következő mátrix egyenlettel számítjuk

$$\delta x = N_b^{-1} \left(\left(I - C^T N_c^{-1} C N_b^{-1} \right) W \right) + C^T N_c^{-1} W_x \quad (35)$$

ahol I egy 5x5 egység mátrix.

Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

A paraméterek számítását a **klasszikus Gauss-Newton iterációs** módszerrel végeztük.

Először jó közelítő értékeket vettünk föl az ismeretlen \mathbf{x} vektor elemeire és kiszámítottuk a $\delta\mathbf{x}$ változásokat.

Az $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ vagy $\mathbf{x} = [0,7 \ 0,7 \ 0,7 \ 0,7 \ 1]^T$

kezdő értékekkel végezhetjük az iterációt.

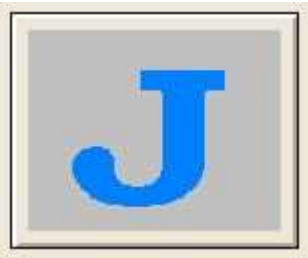
Amennyiben a vektor minden eleme kisebb, mint az előre megadott tolerancia, akkor a forgatási mátrix, a forgatások és az eltolás értékek számítása következik.

Ellenkező esetben az iterációt mindaddig ismételjük egy jobban közelítő értékkel, ameddig a változások értékei kisebbek lesznek a megadott tolerancia értékénél.

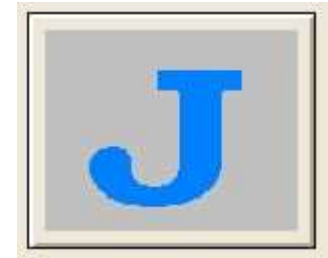
Dátumtranszformáció iterációs megoldása kvaternióval

Dátum transzformáció iterációs megoldása kvaternióval végezetül az alábbiak szerint foglalható össze:

1. A súlypontra vonatkozó $\Delta \mathbf{a}_i, \Delta \mathbf{b}_i$ koordináták számítás (25) egyenlet
2. Az iteráció kezdőértékeinek felvétele: $\mathbf{x} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \lambda]^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$
3. A $\delta \mathbf{x}$ változások számítása (35) egyenlet
4. Ha a $\delta \mathbf{x}$ vektor minden eleme kisebb a megadott ε toleranciánál, melynek értéke $\varepsilon = 1E^{-9}$ akkor folytatás a 6. lépésnél
5. Ha a $\delta \mathbf{x}$ vektor minden eleme nagyobb a megadott toleranciánál, akkor újabb iteráció számítása következik az új kezdőértékkel $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \delta \mathbf{x}^k$ folytatás a 3. lépésnél
6. Az **R forgatási mátrix** számítása (22) egyenlet, **forgatások** számítása (23) egyenlet
7. **t eltolás** paraméter számítása (24) egyenlet, az $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ súlypont koordináták felhasználásával



THI program



Erik W. Grafarend 7 pontos példa fájlból

Table 1 Coordinates for local system and WGS-84 system

Station name	System A (local system)			System B (WGS-84)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
Solitude	4,157,222.543	664,789.307	4,774,952.099	4,157,870.237	664,818.678	4,775,416.524
Buoch Zeil	4,149,043.336	688,836.443	4,778,632.188	4,149,691.049	688,865.785	4,779,096.588
Hohenneuffen	4,172,803.511	690,340.078	4,758,129.701	4,173,451.354	690,369.375	4,758,594.075
Kuehlenberg	4,177,148.376	642,997.635	4,760,764.800	4,177,796.064	643,026.700	4,761,228.899
Ex Mergelaec	4,137,012.190	671,808.029	4,791,128.215	4,137,659.549	671,837.337	4,791,592.531
Ex Hof Asperg	4,146,292.729	666,952.887	4,783,859.856	4,146,940.228	666,982.151	4,784,324.099
Ex Kaisersbach	4,138,759.902	702,670.738	4,785,552.196	4,139,407.506	702,700.227	4,786,016.645

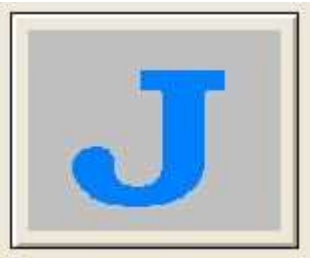
=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

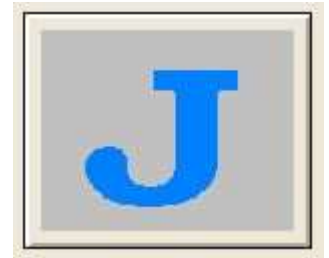
Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

=====



THI program



$$\mathbf{x} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \lambda]^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

Q kvaternió

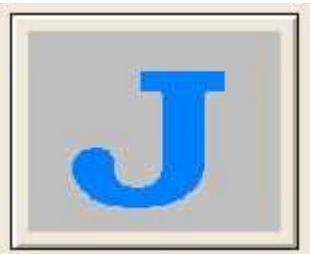
```
0.99999999999182687
2.4204318649556566e_6
_2.1663738415161721e_6
_2.4073178203050514e_6
```

la méretarány

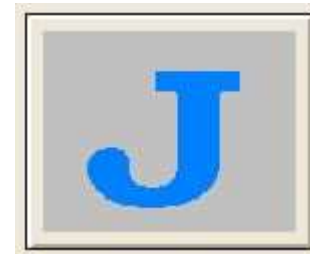
```
1.0000055825198619
```

R forgatási mátrix

```
0.99999999997903011 4.8146251528401392e_6 _4.3327593334620988e_6
_4.8146461270811904e_6 0.99999999997669953 _4.8408532896597505e_6
4.3327360264671049e_6 4.8408741502611506e_6 0.99999999997890354
```

THI program



t eltolás

641.88042526179925

68.655345267616212

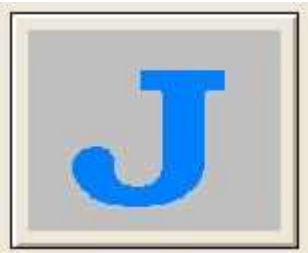
416.39818473067135

Maradék ellentmondások [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	_20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

Súlyegység középhibája:

$m_0 = 0.077233660919533681$



THI program

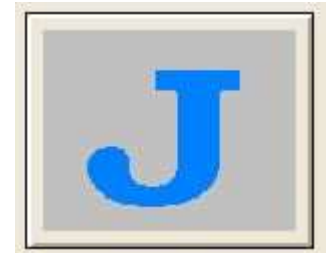


Table 2 Computed transformation parameters

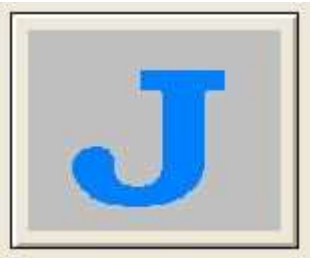
Parameters	Values
Translation	
t_x	641.8804 (m)
t_y	68.6554 (m)
t_z	416.3982 (m)
Rotation	
ε_x	-0.99849861''
ε_y	0.893696604''
ε_z	0.993088663''
Scale	
$k - 1$	5.5825 (ppm)

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány
641.88042526179925	0	0	1.0000055825198619
68.65534526761621	0	0	0.893695764435
416.39818473067135	0	0	0.993087724316

=====



THI program

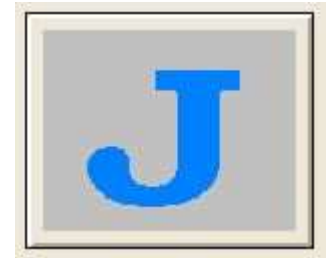


Table 3 Computed quaternion and rotation matrix

Quaternion		Rotation matrix	
0.9999999999183	0.9999999997902	0.00000481462557	-0.00000433275956
0.00000242043167	-0.00000481464655	0.9999999997669	-0.00000484085291
-0.00000216637395	0.00000433273625	0.00000484087377	0.9999999997890
-0.00000240731803			

Q kvaternió

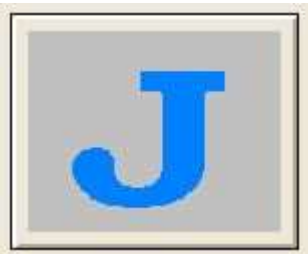
$q_0 = 0.9999999999183$
 $q_1 = 0.00000242043186$
 $q_2 = -0.00000216637384$
 $q_3 = -0.00000240731782$

Q kvaternió

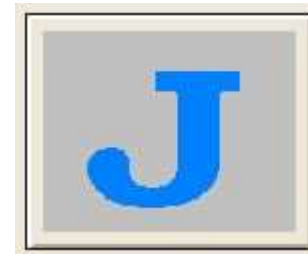
0.9999999999182687
 $2.4204318649556566e_6$
 $-2.1663738415161721e_6$
 $-2.4073178203050514e_6$

R forgatási mátrix

0.99999999997903011 $4.8146251528401392e_6$ $4.3327593334620988e_6$
 $-4.8146461270811904e_6$ 0.9999999997669953 $-4.8408532896597505e_6$
 $4.3327360264671049e_6$ $4.8408741502611506e_6$ 0.9999999997890354



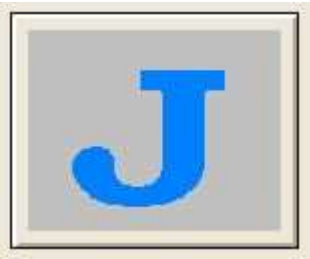
THI program



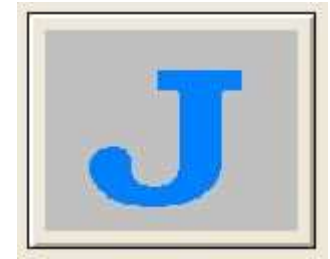
Residual matrix
E(m)

Site	X(m)	Y(m)	Z(m)
Solitude	0.0940	0.1351	0.1402
Buoch Zeil	0.0588	-0.0497	0.0137
Hohenneuffen	-0.0399	-0.0879	-0.0081
Kuelenberg	0.0202	-0.0220	-0.0874
Ex Mergelacc	-0.0919	0.0139	-0.0055
Ex Hof Asperg	-0.0118	0.0065	-0.0546
Ex Keisersbach	-0.0294	0.0041	0.0017

Maradék ellentmondások [mm]				
PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	50	14	78
Hohenneuffen	40	88	8	97
Kuehlenberg	20	22	87	92
Ex Mergelaec	92	14	5	93
Ex Hof Asperg	12	7	55	56
Ex Kaisersbach	29	4	2	30



THI program



=====
Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
641.88042526179925	0 0 _0.998497667920	1.0000055825198619
68.65534526761621	0 0 0.893695765060	
416.39818473067135	0 0 0.993087724442	

=====
MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

=====
Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660919533681
=====

Q kvaternió

q0 = 0.999999999999183
q1 = 0.00000242043186
q2 = _0.00000216637384
q3 = _0.00000240731782
=====

THI program

Térbeli HELMERT transzformáció

Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
641.88042526179925	0 0 0.998497667920	1.0000055825198619
68.65534526761621	0 0 0.893695765060	
416.39818473067135	0 0 0.993087724442	

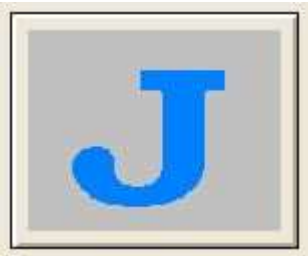
MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	50	14	78
Hohenneuffen	40	88	8	97
Kuehlenberg	20	22	87	92
Ex Mergelaec	92	14	5	93
Ex Hof Asperg	12	7	55	56
Ex Kaisersbach	29	4	2	30

Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660919533681

Q kvaternió

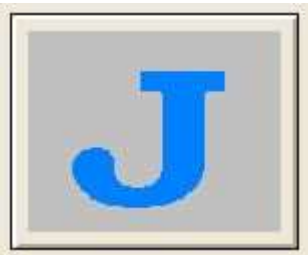
q0 = 0.999999999999183
q1 = 0.00000242043186
q2 = 0.00000216637384
q3 = 0.00000240731782



THI program

Table 5 Transformed coordinates in system B from system A and residuals

Station name	Transformed coordinates in system B		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
Solitude	4,157,870.143	664,818.543	4,775,416.384
Buoch Zeil	4,149,690.990	688,865.835	4,779,096.574
Hohenneuffen	4,173,451.394	690,369.463	4,758,594.083
Kuehlenberg	4,177,796.044	643,026.722	4,761,228.986
Ex Mergelaec	4,137,659.641	671,837.323	4,791,592.536
Ex Hof Asperg	4,146,940.240	666,982.144	4,784,324.154
Ex Kaisersbach	4,139,407.535	702,700.223	4,786,016.643



PSZ

Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.143	664818.543	4775416.384
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149690.990	688865.835	4779096.574
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.394	690369.463	4758594.083
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.044	643026.722	4761228.986
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.641	671837.323	4791592.536
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.240	666982.144	4784324.154
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.535	702700.223	4786016.643

load THI.run

Térbeli HELMERT transzformáció
Transzformációs paraméterek
1. Ismertek
2. Nem ismertek

1
Írja be az Ex eltolás értékét
Írja be az Ey eltolás értékét
Írja be az Ez eltolás értékét
Írja be a Q kvaternió q0 értékét
Írja be a Q kvaternió q1 értékét
Írja be a Q kvaternió q2 értékét
Írja be a Q kvaternió q3 értékét
Írja be az m méretarány értékét

2
Töltse be az FKJ és CKJ Forrás és Cél Koordináta Jegyzéket

load FKJ.run
load CKJ.run

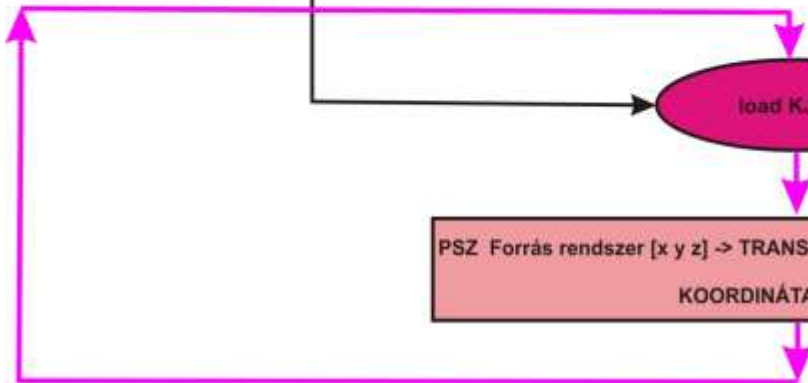


Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok
KOORDINÁTA JEGYZÉK
PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
Transzformációs paraméterek
Eltolás Elforgatás Méretarány
tx α m
ty β
tz γ
MARADÉK ELLENTMONDÁSOK
PSZ ex ey ez e
Súlyegység középhibája m0 =
Q kvaternió
q0
q1
q2
q3

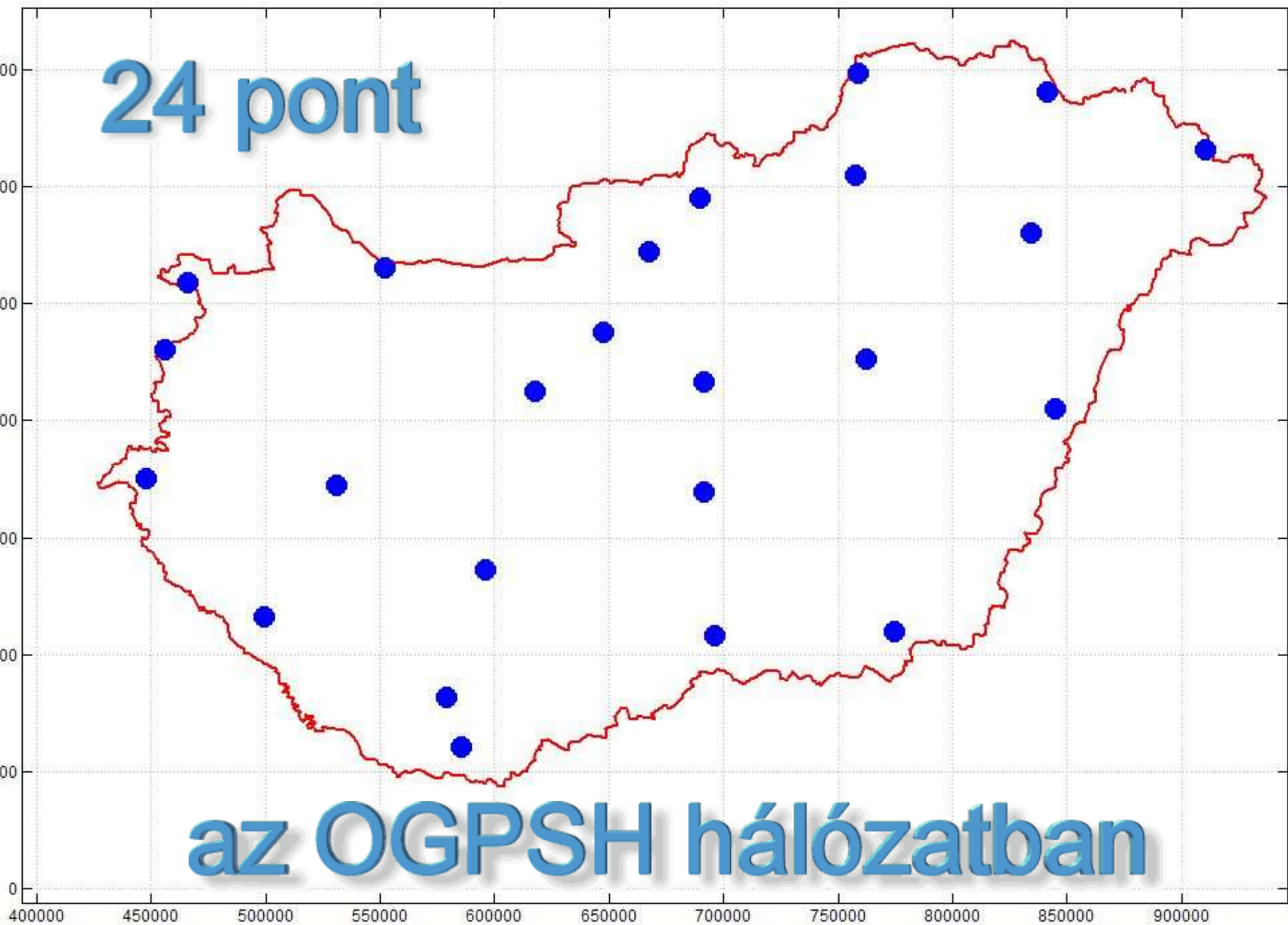
Térbeli HELMERT transzformáció
Transzformációs paraméterek
Eltolás Elforgatás Méretarány
tx α m
ty β
tz γ
Q kvaternió
q0
q1
q2
q3

load KJ.run

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
KOORDINÁTA JEGYZÉK



24 pont



az OGPSH hálózatban

24 OGPSH pont

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
_47.74933355068788	0	0	_0.306123213089	0.9999978420534464
_69.28009660798125	0	0	_0.065932597122	
10.99731061328203	0	0	_0.470624405449	

Súlyegység középhibája: $m_0 = 0.32418473225812611$

Q kvaternió

```
1.0000000000084597
_7.4206342672792757e_7
_1.5982597214247128e_7
_1.1408256335389682e_6
```

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

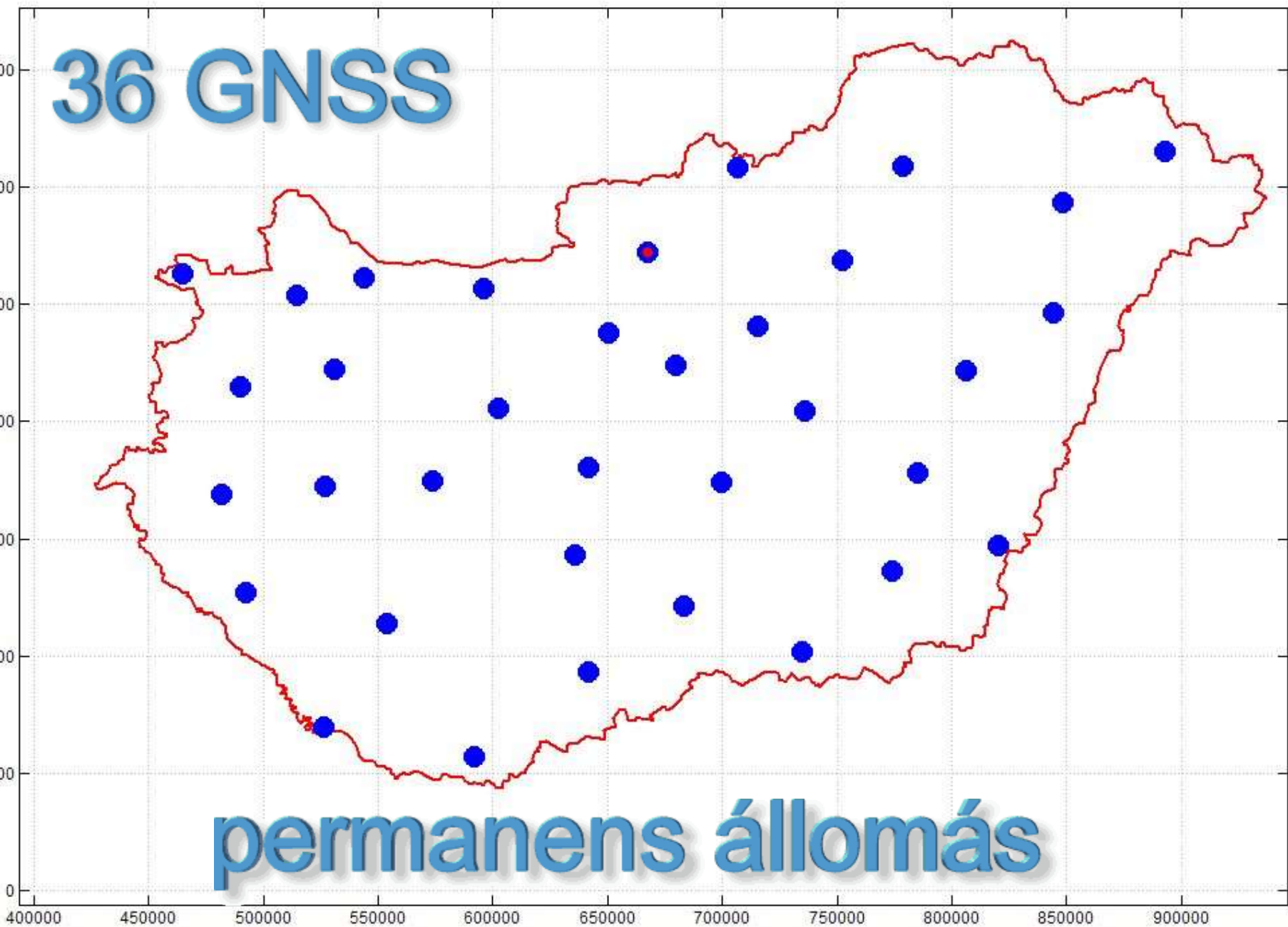
Eltolás			Elforgatás	Méretarány
47.74935320112854	0	0	0.306125542704	1.0000021579310256
_69.28051680489443	0	0	_0.065929942692	
_10.99732533283532	0	0	0.470620253133	

Súlyegység középhibája: $m_0 = 0.32418543185011989$

Q kvaternió

```
1.0000000000028832
_7.420694385260523e_7
_1.598178444942707e_7
_1.1408158052317323e_6
```

36 GNSS



permanens állomás

36 GNSS permanens állomás

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány	
_51.96643497003242	0	0	_0.331785442204	0.9999988139153917
71.39042463316582	0	0	_0.114897321290	
14.78340903297067	0	0	_0.397012457742	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.12097859778839842

Q kvaternió

1.0000000007559906
8.042708765183976e_7
2.7851819219222469e_7
9.6238558015356886e_7

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

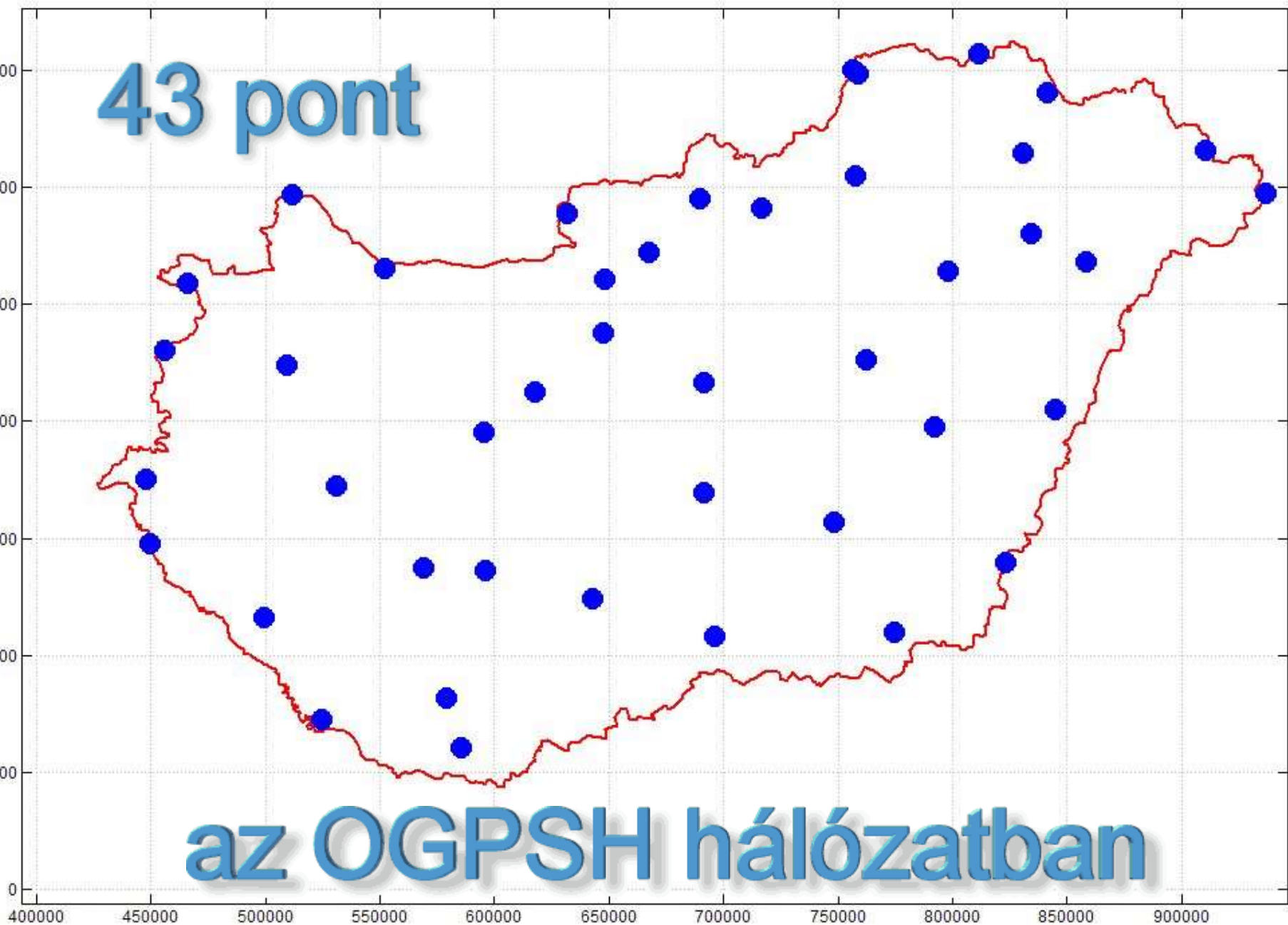
Eltolás		Elforgatás	Méretarány	
51.96470452938229	0	0	0.331918304533	1.0000011806202826
_71.38893020967953	0	0	0.114397846915	
_14.76109108235687	0	0	0.397073912375	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.12097873536740955

Q kvaternió

1.0000000007554279
_8.0459240893167132e_7
_2.7730898060839141e_7
_9.6253410326257538e_7

43 pont



az OGPSH hálózatban

43 OGPSH pont

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány	
_47.09508530888706	0	0	_0.263031423410	0.9999979020935977
67.88758528418839	0	0	_0.096979283117	
10.49353692680597	0	0	_0.488204349211	

Súlyegység középhibája: $m_0 = 0.37292550986285794$

Q kvaternió

```
1.0000000000161495
6.3760588495626314e_7
_2.3508517076049823e_7
1.1834405885019062e_6
```

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

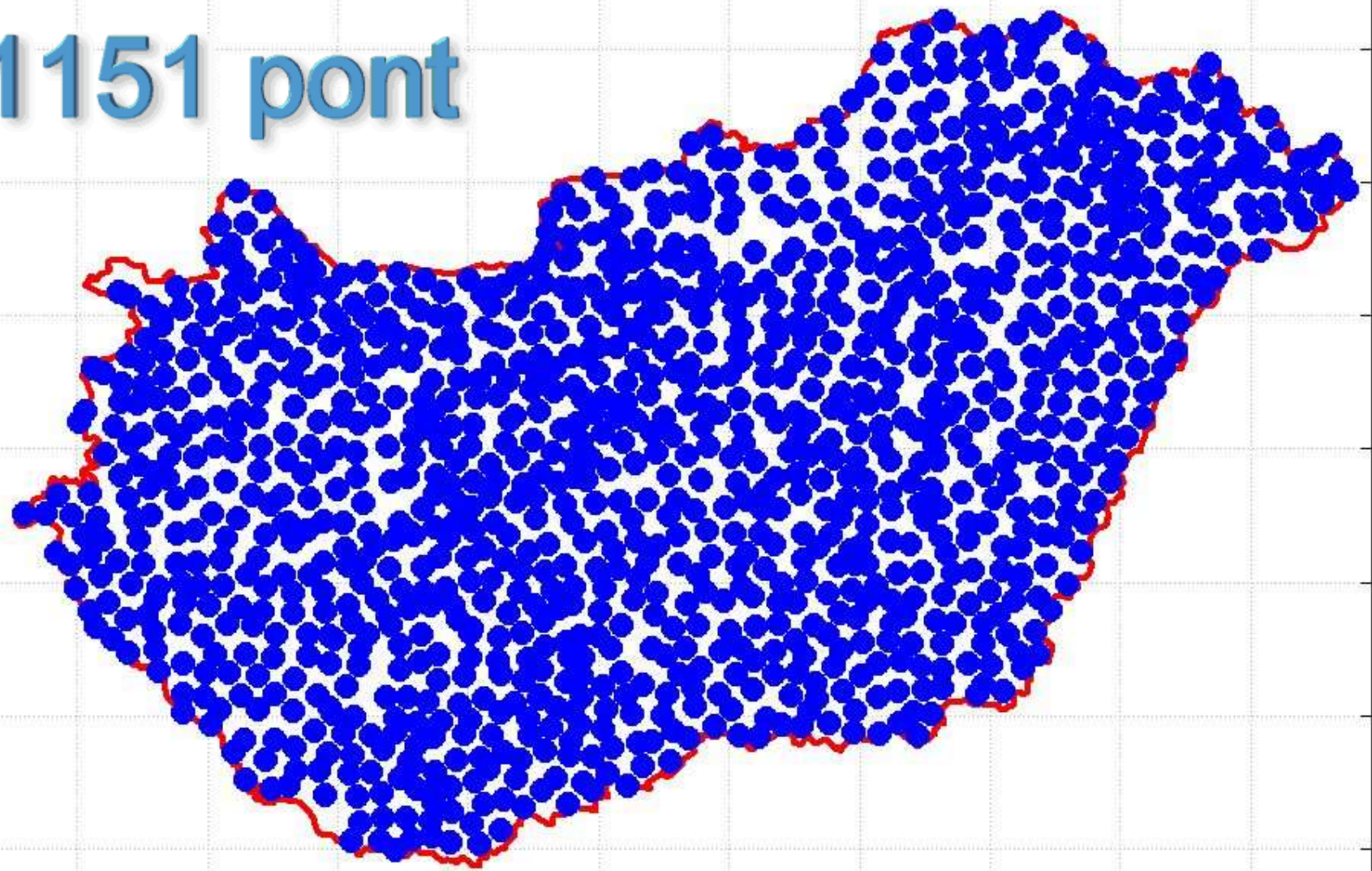
Eltolás		Elforgatás	Méretarány	
47.09497904544696	0	0	0.263031877562	1.0000020978234070
_67.88777068816125	0	0	_0.096984020876	
_10.49331891443580	0	0	0.488207751280	

Súlyegység középhibája: $m_0 = 0.37292629218370243$

Q kvaternió

```
1.0000000000161102
_6.3760754228436853e_7
2.3509514626974617e_7
_1.1834491351408273e_6
```

1151 pont



az OGPSH hálózatban

1151 OGPSH pont

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány	
_51.56851634383202	0	0	_0.340300291935	0.9999987126535473
_71.52008801978082	0	0	_0.119145068142	
15.28787184134126	0	0	_0.406540633067	

Súlyegység középhibája: $m0 = 0.11299381183446285$

Q kvaternió

0.99999999999929834
8.2491147070003952e_7
2.8881498242432361e_7
9.8548254243537315e_7

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány	
51.56845735525712	0	0	0.340300514594	1.0000012873448947
_71.52030024072155	0	0	0.119144276013	
_15.28772954829037	0	0	0.406540970698	

Súlyegység középhibája: $m0 = 0.11299395729613144$

Q kvaternió

0.99999999999929945
_8.2491144119752621e_7
_2.8881468812241248e_7
_9.8548288438361771e_7

Zeng – Yi

Tesztfeladatok szimulált koordinátákkal

B→A1 kis forgásszögek

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

PSZ	x	y	z	X	Y	Z
1	10.000	30.000	5.000	40.437	59.903	14.682
2	20.000	30.000	12.500	50.367	59.847	22.275
3	30.000	30.000	15.000	60.343	59.721	24.867
4	10.000	20.000	9.500	40.235	49.967	19.319
5	20.000	20.000	11.000	50.219	49.828	20.911
6	30.000	20.000	10.000	60.227	49.645	20.005
7	10.000	10.000	14.500	40.028	40.038	24.455
8	20.000	10.000	4.500	50.117	39.740	14.549
9	30.000	10.000	4.000	60.120	39.573	14.142

n = 9 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
29.99823028266335	0 47 31.252012352985	1.0000227366253285
30.00046987693159	0 31 14.217921271189	
10.00006743257287	0 55 43.247783217219	

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
1	_1	0	0	1
2	_1	1	0	2
3	_1	2	0	2
4	_0	0	0	1
5	0	1	_1	1
6	0	_7	0	7
7	1	0	0	1
8	1	1	0	1
9	1	2	0	2

=====

Súlyegység középhibája: m0 = 0.0018259779959799709

=====

Q kvaternió

q0 = 0.99993321081940

q1 = _0.00687445845693

q2 = _0.00459897112805

q3 = _0.00807249565128

=====

Zeng – Yi

Tesztfeladatok szimulált koordinátákkal

B→A2 nagy forgásszögek

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK						
1	10.000	30.000	5.000	53.325	51.360	5.028
2	20.000	30.000	12.500	61.051	51.648	14.850
3	30.000	30.000	15.000	69.312	49.212	20.514
4	10.000	20.000	9.500	47.733	46.333	13.009
5	20.000	20.000	11.000	56.101	43.353	17.841
6	30.000	20.000	10.000	64.737	39.011	20.593
7	10.000	10.000	14.500	42.087	41.578	21.407
8	20.000	10.000	4.500	51.686	32.334	16.672
9	30.000	10.000	4.000	60.269	28.265	19.840

n = 9 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek

	Eltolás	Elforgatás	Méretarány
30.00016823367852	33 12	48.492700493240	1.0000199563410337
29.99992344722332	6 8	46.053501577288	
9.99954877705121	30 55	48.205836123700	

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]				
PSZ	ex	ey	ez	e
1	0	0	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	1
9	0	0	0	0

=====

Súlyegység középpontja: m0 = 0.00026419635541306141

=====

Q kvaternió

q0 = 0.92634995571619

q1 = 0.26135833670539

q2 = 0.12561249996497

q3 = 0.24039359232675

=====

Zeng – Yi

Tesztfeladatok szimulált koordinátákkal

B→A2 szuper nagy forgásszögek

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

PSZ	X	Y	Z	X	Y	Z
1	10.000	30.000	5.000	52.116	7.239	14.222
2	20.000	30.000	12.500	58.807	9.608	24.512
3	30.000	30.000	15.000	61.443	9.072	34.463
4	10.000	20.000	9.500	49.949	17.746	16.493
5	20.000	20.000	11.000	51.773	16.629	26.376
6	30.000	20.000	10.000	51.570	14.060	36.090
7	10.000	10.000	14.500	48.187	28.543	18.797
8	20.000	10.000	4.500	40.683	20.745	27.902
9	30.000	10.000	4.000	40.886	18.466	37.650

n = 9 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
30.00013025653966	83 21 12.807039002248	1.0000122196695893
29.99996363904662	_54 _12 _9.233917704114	
10.00005582802216	84 2 6.798470068257	

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
1	0	0	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	1
8	0	0	0	0
9	0	0	0	1

=====

Súlyegység középpontja: m0 = 0.0003189606494462068

=====

Q kvaternió

q0 = _0.29121896346376

q1 = 0.66752016745323

q2 = 0.14341112073731

q3 = 0.67010565719982

=====

THI program



Térbeli Helmert Iterációs program futtatása



Közös pontok száma	7 <i>Grafarend</i>	9 <i>Zeng - Yi</i>	24 <i>OGPSH</i>	36 <i>GNSS</i>	43 <i>OGPSH</i>	1151 <i>OGPSH</i>
Program futás ideje [sec]	1	1	1	1	1	4
Eredmények listája [A4-es lapméret] [8-as betűméret]	2	2	2	2	2	31

Jsoftware

High-performance development platform

Home Page: www.jsoftware.com

About J

J602 - Copyright 1994-2008 Jsoftware Inc., www.jsoftware.com.

Installer: j602a_win.exe

Engine: j602/2008-03-03/16:45

Library: 6.02.056

This computer program is protected by copyright law and international treaties.

OK

Összefoglalás

- A **dátumtranszformáció** az egyik leggyakrabban előforduló számítási feladat a geodéziában, forogrammetriában, térinformatikában, animációban és a számítógépes megjelenítésben.
- A **hagyományos módszer hátránya**, hogy a forgásszögek meghatározása erősen függ a paraméterek kezdeti értékeitől, amely szuper nagy forgásszögek esetén nem ad megoldást.
- Az ismertetett módszer **egység kvaterniót alkalmaz a térbeli forgatási mátrix meghatározásához.**

Összefoglalás

- Az előadásban **kvaternó algebra alkalmazásán alapuló geodéziai dátumtranszformáció iterációs megoldását ismertettük linearizálással, a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben.**
- A számítások azt mutatják, hogy **a kvaternió alapú iterációs megoldás független a paraméterek kezdeti értékeitől, gyors és megbízható eredményt ad.**
- **Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható a transzformációs paraméterek számításához.**
- *Az algoritmus alkalmazhatóságát számpéldán mutattuk be.*

Köszönetnyilvánítás

Őszinte és hálás köszönetet mondok

a FÖMI munkatársai közül

***Kenyeres Ambrusnak a GNSS permanens állomások
EOV és ETRS 89 koordinátáiért, valamint***

***Virág Gábornak a GNSS permanens állomások HD72
koordinátáiért,***

Kádár István és Tóth Gyula tisztelt kollégáknak,

továbbá a J Forums Programming tagjai közül

Programming – Programming forum

Henry Rich, Mike Day és Raul Miller uraknak

***a feladat megoldásához és
a program elkészítéséhez nyújtott önzetlen segítségükért.***

Hivatkozások

- A. Kleusberg, P.J.G. Teunissen (Eds.)** (1996): *GPS for Geodesy, Lecture Notes in Earth Sciences 60*, Springer Verlag Berlin Heidelberg
- A. Leick** (2004): *GPS satellite surveying, 3rd edn.* Wiley, Hoboken
- B. H. Wellenhoff, H. Lichtenegger and J. Collins** (2001): *GPS Theory and Practice, Fifth revised Ed.* Springer-Verlag Wien New York
- B Hofmann Wellenhoff , Kienast G, Lichtenegger H** (1994): *GPS in der Praxis*, Springer-Verlag, Wien, New York
- Detrekői Á.** (1991): *Kiegyenlítő számítások* Tankönyvkiadó Budapest
- Bertold K. P. Horn**(1987): *Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions*, *J. Opt. Soc. Am. A*/Vol. 4, No. 4/April pp. 629-642
- Grafarend EW, Awange LJ** (2003): *Nonlinear analysis of the three-dimensional datum transformation [conformal group C7(3)]*. *J Geod* 77:66–76
- G. Seeber** (1993): *Satellite Geodesy* Walter de Gruyter, Berlin New York
- Hamilton WR** (1853): *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a New mathematical method*, Hodges and Smith, Dublin
- H. Zeng – Q. Yi** (2011): *Quaternion-Based Iterative Solution of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem*, *J of Computers* Vol.6. No. 7. July, 1361-1368
- J L. Awange, E. W Grafarend**(2005): *Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics The answer to modern Challenges*, Springer Berlin Heidelberg New York
- Papp et al.** (1997): *GPS network transformation into different datums and projection systems. Reports on Geodesy, No.4(27)*, 265-280.
- Papp et al.** (2002): *Hungarian GPS Network Transformation into Different Datums and Projection Systems. Per. Pol. Civ. Eng. (46/2)*, 199-204
- Papp E - Szűcs L** (2005): *Földi és műholdas hálózatok transzformációja Geomatikai Közlemények VIII.* 85-92
- Papp E** (2013): *Geodéziai dátumtranszformáció kvaternióval. Geomatikai Közlemények XVI.* 17-28
- Vaniček P, Steeves RR** (1996): *Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. J Geod* 70:740–745
- Vaniček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S** (2002): *On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. Geomatica* 56(4):329–340
- Welsch WM**(1993): *A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of the terrestrial and satellite network observations. Manuscr Geod* 17:210–214
- Yang Y** (1999): *Robust estimation of geodetic datum transformation. J Geod* 73:268–274
- Y.-Z. Shen · Y. Chen · D.-H. Zheng** (2006): *A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm J Geod* 80: 233–239

VÉGE